Домашно №1, Задача 1 по Алгебра 2 на Компютърни Науки

Камен Димитров Младенов, Група 6

7 Април 2023

(i) Подточка

Ще докажем, че G е подгрупа на $GL_2(\mathbb{R})$, съгласно

$$\forall A = \begin{pmatrix} a & c \\ 0 & b \end{pmatrix} \in G, \text{ знаем че } a, b \in \mathbb{R}^* \implies \det(A) = a.b - c.0 = ab \neq 0 \text{ и } G \subseteq GL_2(\mathbb{R})$$

Тоест ще докажем, че $\forall A, B \in G \Rightarrow A.B \in G, B^{-1} \in G$. Нека

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & c_1 \\ 0 & b_1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} a_2 & c_2 \\ 0 & b_2 \end{pmatrix}$$

$$A.B = \begin{pmatrix} a_1 & c_1 \\ 0 & b_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_2 & c_2 \\ 0 & b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1a_2 & a_1c_2 + c_1b_2 \\ 0 & b_1b_2 \end{pmatrix} = C$$

$$a_1a_2, b_1b_2 \in \mathbb{R}^* \implies C \in G \text{ и } \det(C) \neq 0$$

$$B^{-1} = \begin{pmatrix} a_2 & c_2 \\ 0 & b_2 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{\det(B)} \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{pmatrix}^\top = \frac{1}{\det(B)} \begin{pmatrix} b_2 & 0 \\ c_2 & a_2 \end{pmatrix}^\top = \frac{1}{\det(B)} \begin{pmatrix} b_2 & c_2 \\ 0 & a_2 \end{pmatrix}$$

$$a_2, b_2 \in \mathbb{R}^* \text{ и } \det(B) \neq 0 \implies B^{-1} \in G \text{ и } \det(B^{-1}) \neq 0$$

(ii) Подточка

Ще докажем, че изображението φ е хомоморфизъм на групи, като

$$\varphi : G \to \mathbb{R}^*, \quad \forall \begin{pmatrix} a & c \\ 0 & b \end{pmatrix} \in G : \varphi \begin{pmatrix} a & c \\ 0 & b \end{pmatrix} = a^2b$$

$$\varphi\left(\begin{pmatrix} a_1 & c_1 \\ 0 & b_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_2 & c_2 \\ 0 & b_2 \end{pmatrix}\right) = \varphi\left(\begin{pmatrix} a_1a_2 & a_1c_2 + c_1b_2 \\ 0 & b_1b_2 \end{pmatrix}\right) = (a_1a_2)^2(b_1b_2) = (a_1^2b_1)(a_2^2b_2)$$
$$= \varphi\left(\begin{pmatrix} a_1 & c_1 \\ 0 & b_1 \end{pmatrix}\right) \varphi\left(\begin{pmatrix} a_2 & c_2 \\ 0 & b_2 \end{pmatrix}\right) \implies \varphi \text{ е хомоморфизъм}$$

$$\forall a \in \mathbb{R}^*, \forall c \in \mathbb{R} : \varphi\left(\begin{pmatrix} a & c \\ 0 & a^{-1} \end{pmatrix}\right) = a^2a^{-1} = a \implies \varphi \text{ е върху}$$

Забелязваме, че

$$\forall a \in \mathbb{R}^* \, \forall c \in \mathbb{R} : \varphi\left(\begin{pmatrix} a & c \\ 0 & a^{-2} \end{pmatrix}\right) = a^2a^{-2} = 1 \implies \ker(\varphi) = \left\{ \begin{pmatrix} a & c \\ 0 & a^{-2} \end{pmatrix} \middle| \, a \in \mathbb{R}^*, c \in \mathbb{R} \right\} = H$$

$$\forall a, b \in \mathbb{R}^*, \forall c \in \mathbb{R} : \varphi \begin{pmatrix} a & c \\ 0 & b \end{pmatrix} = a^2b \in \mathbb{R}^* \implies \operatorname{im}(\varphi) = \mathbb{R}^*$$

От теоремата за хомоморфизмите, следва че $G/H = G/\ker(\varphi) \simeq \operatorname{im}(\varphi) = \mathbb{R}^*$